

Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Ивановский государственный
архитектурно-строительный университет»

Кафедра строительной механики

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ В ТОЧКЕ ТЕЛА

*Методические указания и контрольные задания
по дисциплине «Теория упругости»
для студентов дневной и заочной форм обучения*

Иваново 2007

Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Ивановский государственный
архитектурно-строительный университет»

Кафедра строительной механики

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ В ТОЧКЕ ТЕЛА

*Методические указания и контрольные задания
по дисциплине «Теория упругости»
для студентов дневного и заочного отделений*

Иваново 2007

Исследование напряженного состояния в точке тела: Методические указания и контрольные задания по дисциплине «Теория упругости» для студентов дневного и заочного отделений / Иван. гос. архит.-строит. ун-т; Сост. В.И. Караваев. — Иваново, 2007. — 20 с.

Методические указания содержат краткие теоретические сведения. Приведены варианты контрольных заданий. Рассмотрен пример решения.

Методические указания предназначены в помощь студентам дневной и заочной форм обучения при выполнении ими контрольной работы «Исследование напряженного состояния в точке тела».

Рецензент кандидат технических наук,
профессор кафедры строительной механики ИГАСУ

Ю.А. Федоров

Составитель

Караваев Василий Иванович

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ В ТОЧКЕ ТЕЛА

Методические указания и контрольные задания по дисциплине

«Теория упругости» для студентов специальности 290300

«Промышленное и гражданское строительство»

Редактор Е. Аверьянова

Подписано в печать 20.03.2007. Формат бумаги 60х84 1/16.

Печать плоская. Печ. л. 1,25. Тираж 150 экз. Заказ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

«Ивановский государственный архитектурно-строительный университет».

Сектор редакционно-издательской деятельности ЦНИТ.

153037, г. Иваново, ул. 8 Марта, 20.

Отпечатано в ОМТ МИБФ.

153003. г. Иваново, ул. Рабфакская, 34, оф. 101.

Теория упругости представляет собой раздел механики, изучающий деформации в твердом теле, вызванные физическими воздействиями, и возникающие при этом силы как в состоянии покоя, так и в состоянии движения. Сопротивление материалов решает те же задачи, однако исходные предпосылки и методы решения задач имеют существенные различия. В сопротивлении материалов рассматриваются приближенные теоретические методы, использующие кинематические или статические гипотезы (например, гипотеза плоских сечений).

В теории упругости рассматриваются задачи, которые не могут быть решены методами сопротивления материалов, при этом используется более строгий математический аппарат.

Задача о напряженном состоянии в точке тела является базовой при изучении классической теории упругости. Эта теория основывается на принципах, известных из курса сопротивления материалов: принципе независимости действия сил и принципе Сен-Венана (локальности нагрузок). Кроме того, теоретическими предпосылками являются гипотезы сплошности, однородности и изотропности идеально упругих тел.

При изучении данной темы студент должен усвоить систему обозначения напряжений, правило знаков для них, иметь понятие о главных напряжениях, главных площадках, инвариантах тензора напряжений. Необходимо внимательно проанализировать вывод кубического уравнения для определения главных напряжений.

Исследование и анализ напряженного состояния в элементах строительных конструкций и грунтах базируются на понятиях теории упругости и изучаются в специальных дисциплинах, предусмотренных программой подготовки инженеров-строителей.

Понятие о напряженном состоянии в точке

Рассмотрим тело произвольной формы (рис.1, а), находящееся в равновесии под действием системы сил. Напряженное состояние в разных точках тела неоднородно, т.е. вектор полного напряжения \mathbf{P} в каждой точке тела имеет свою величину и направление. Для

анализа напряженного состояния мысленно вырежем вокруг некоторой точки K параллелепипед со сторонами dx, dy, dz (рис. 1, б).

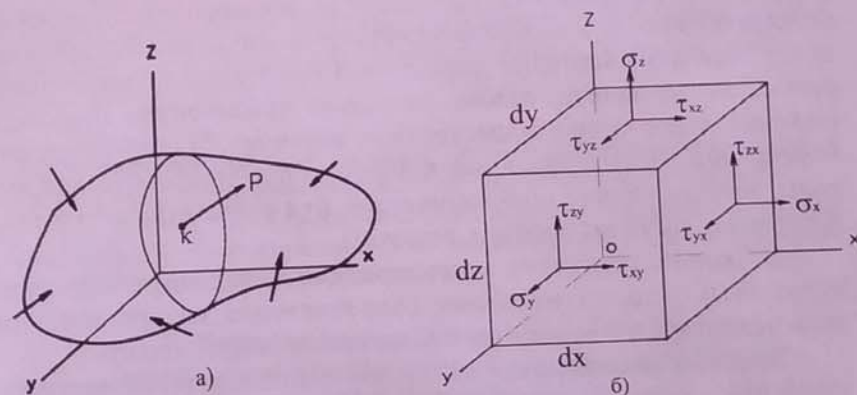


Рис. 1. Компоненты напряженного состояния в точке:
а - произвольное тело, нагруженное системой сил; б - бесконечно малый параллелепипед, выделенный вокруг произвольной точки K

В силу малости граней параллелепипеда примем, что напряженное состояние одинаково во всех его точках и соответствует напряженному состоянию в точке K . Определим компоненты вектора P , действующие на каждой грани параллелепипеда. Для этого разложим его на координатные оси X, Y, Z . Учитывая закон парности касательных напряжений, получим 6 значений напряжений, характеризующих напряженное состояние в точке K .

На каждой грани (площадке) будут действовать 3 компонента напряжений: одно нормальное и 2 касательных. Например, на площадке, параллельной плоскости ZOY , действуют: нормальное напряжение σ_x , направленное вдоль оси OX , и касательные напряжения τ_{xz}, τ_{xy} . Первый индекс соответствует оси, вдоль которой действует напряжение, второй — оси, перпендикулярной данной площадке.

Правило знаков:

Нормальное напряжение положительно, если оно направлено в сторону внешней нормали.

Касательное напряжение положительно, если на площадке с положительным направлением внешней нормали оно направлено в направлении координатной оси или на площадке с отрицательным направлением внешней нормали — против направления координатной оси.

Определим величину полного напряжения на наклонной площадке ABC , заданной направляющими косинусами нормали v к ней (рис. 2).

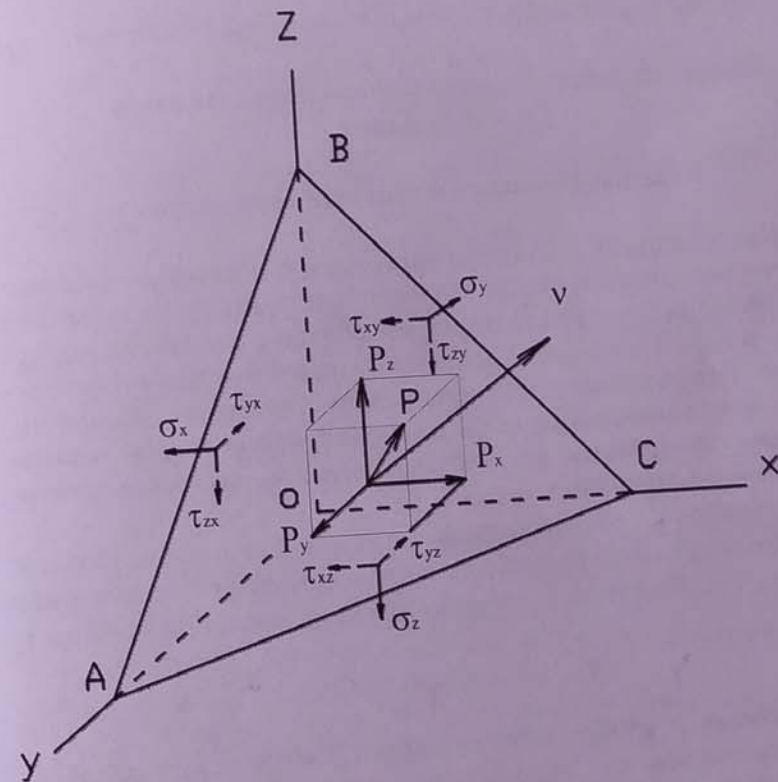


Рис. 2. Определение полного напряжения на наклонной площадке

$$\ell = \cos(x, v); m = \cos(y, v); n = \cos(z, v). \quad (1)$$

Спроецируем вектор полного напряжения на координатные оси, обозначив проекции p_x, p_y, p_z .

Площадь треугольника ABC обозначим dF ; треугольника AOB – dF_x ; треугольника BOC – dF_y ; треугольника AOC – dF_z .

$$dF_x = dF\ell; dF_y = dFm; dF_z = dFn. \quad (2)$$

Спроецируем все напряжения, действующие на площадке, на оси координат:

$$p_x = \sigma_x \ell + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n; p_y = \tau_{yx} \ell + \sigma_y m + \tau_{zy} n; p_z = \tau_{zx} \ell + \tau_{zy} m + \sigma_z n. \quad (3)$$

Полное напряжение p_v на наклонной площадке равно

$$p_v = p_x \ell + p_y m + p_z n. \quad (4)$$

Главные площадки и главные напряжения

При изменении положения наклонной площадки касательные и нормальные напряжения на ней будут меняться. При этом можно найти такое ее положение, когда касательные напряжения будут отсутствовать. Нормальные напряжения при этом примут экстремальные (максимальные или минимальные) значения. *Площадки, на которых касательные напряжения отсутствуют, называют главными площадками, а нормальные напряжения, действующие на них - главными напряжениями.*

В этом случае полное напряжение P_v , действующее на главной площадке, направлено по нормали к ней и совпадает с главным напряжением σ_v . Проекция этого напряжения на оси координат будут равны

$$p_x = \sigma_x \ell; p_y = \sigma_y m; p_z = \sigma_z n. \quad (5)$$

Приравняем правые части равенств (3) и (5) между собой, в результате получим систему уравнений, необходимых для определения ℓ, m, n - направляющих косинусов нормали к данной площадке.

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x - \sigma) \ell + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n &= 0 \\ \tau_{yx} \ell + (\sigma_y - \sigma) m + \tau_{yz} n &= 0 \\ \tau_{zx} \ell + \tau_{zy} m + (\sigma_z - \sigma) n &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Из курса аналитической геометрии известно, что направляющие косинусы нормали к площадке связаны между собой соотношением

$$\ell^2 + m^2 + n^2 = 1. \quad (7)$$

Следовательно, система однородных уравнений (6) имеет ненулевое решение. Это возможно, если определитель системы равен 0:

$$\begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma) & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & (\sigma_y - \sigma) & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & (\sigma_z - \sigma) \end{vmatrix} = 0. \quad (8)$$

Раскрывая определитель, получим следующее кубическое уравнение:

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0. \quad (9)$$

Коэффициенты I_1, I_2, I_3 называются *инвариантами тензора напряжений*, которые определяются из следующих выражений:

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z; \\ I_2 &= \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{yx}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2; \\ I_3 &= \sigma_x \sigma_y \sigma_z - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{yx}^2 + 2 \tau_{yx} \tau_{yz} \tau_{zx}. \end{aligned} \quad (10)$$

Значения инвариантов не изменяются при повороте осей, а зависят только от нагрузок, действующих на тело.

Уравнение (9) имеет три корня $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, которые являются значениями главных напряжений в данной точке, действующих на трех взаимно перпендикулярных площадках.

Для решения кубического уравнения (9) используют вспомогательные величины:

$$a = (I_2 - I_1^2/3)/3; b = -I_1^3/27 + I_1 I_2/6 - I_3/2.$$

Корни уравнения определяют из равенств:

$$\begin{aligned}\sigma' &= 2(\pm\sqrt{a}\cos\frac{\pi-\varphi}{3} + \frac{I_1}{6}); \\ \sigma'' &= 2(\pm\sqrt{a}\cos\frac{\pi+\varphi}{3} + \frac{I_1}{6}); \\ \sigma''' &= -2(\pm\sqrt{a}\cos\frac{\varphi}{3} - \frac{I_1}{6}).\end{aligned}\quad (11)$$

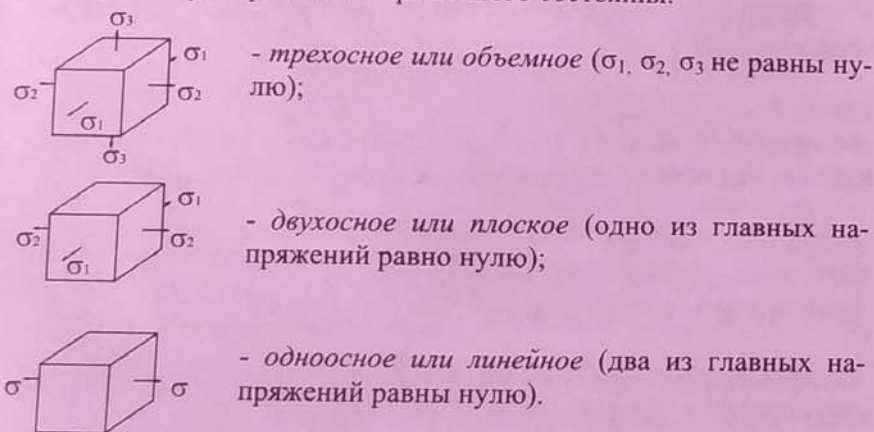
Знак перед корнем должен совпадать со знаком b .

Максимальное из этих напряжений обозначают σ_1 , минимальное - σ_3 , промежуточное - σ_2 , т.е. $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

Проверку полученных значений главных напряжений производят по формулам (10), принимая касательные напряжения равными нулю и заменяя индексы:

$$\begin{aligned}I_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3; \\ I_2 &= \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1; \\ I_3 &= \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3.\end{aligned}$$

Существует три вида напряженного состояния:



О виде напряженного состояния можно судить по значениям инвариантов (см. формулы (10)). Если $I_3=0$, то напряженное состояние двухосное. Если $I_2=I_3=0$, то напряженное состояние является одноосным.

При анализе напряженного состояния в точке важно знать направления, по которым действуют главные напряжения, т.е. направления нормалей к главным площадкам. Они определяются на-

правляющими косинусами ℓ, m, n . Их значения находят, решая например, первые два уравнения из системы (6) совместно с уравнением (7):

$$\left. \begin{aligned}(\sigma_x - \sigma)\ell + \tau_{xy}m + \tau_{xz}n &= 0 \\ \tau_{yx}\ell + (\sigma_y - \sigma)m + \tau_{yz}n &= 0 \\ \ell^2 + m^2 + n^2 &= 1\end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Подставляя последовательно вместо σ полученные значения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, находят значения ℓ_i, m_i, n_i ($i=1,2,3$) для каждой из трех нормалей к главным площадкам.

Выражения для направляющих косинусов ℓ_i, m_i, n_i можно получить, используя известное из математики правило Крамера для решения системы алгебраических уравнений:

$$\ell_i = \Delta_{1i}/D_i; \quad m_i = \Delta_{2i}/D_i; \quad n_i = \Delta_{3i}/D_i, \quad (13)$$

где $\Delta_{1i} = -(\sigma_y - \sigma_i)\tau_{zx} + \tau_{yx}\tau_{yz}$;

$$\Delta_{2i} = -(\sigma_x - \sigma_i)\tau_{yz} + \tau_{yx}\tau_{zx};$$

$$\Delta_{3i} = (\sigma_x - \sigma_i)(\sigma_y - \sigma_i) - \tau_{yx}^2;$$

$$D_i = \sqrt{\Delta_{1i}^2 + \Delta_{2i}^2 + \Delta_{3i}^2}.$$

Полученные направления нормалей к главным площадкам называются *главными направлениями*.

После определения главных нормалей необходимо проверить, являются ли главные площадки взаимно перпендикулярными. Выражения для проверки можно получить следующим образом. Подставим в выражения (6) значения главных напряжений и направляющих косинусов, соответствующие первой (ℓ_1, m_1, n_1) и второй (ℓ_2, m_2, n_2) главным площадкам, и значения главных напряжений σ_1, σ_2 на этих площадках.

$$\left. \begin{aligned}(\sigma_x - \sigma_1)\ell_1 + \tau_{yx}m_1 + \tau_{xz}n_1 &= 0 \\ \tau_{yx}\ell_1 + (\sigma_y - \sigma_1)m_1 + \tau_{yz}n_1 &= 0 \\ \tau_{xz}\ell_1 + \tau_{zy}m_1 + (\sigma_z - \sigma_1)n_1 &= 0 \\ (\sigma_x - \sigma_2)\ell_2 + \tau_{yx}m_2 + \tau_{xz}n_2 &= 0 \\ \tau_{yx}\ell_2 + (\sigma_y - \sigma_2)m_2 + \tau_{yz}n_2 &= 0 \\ \tau_{xz}\ell_2 + \tau_{zy}m_2 + (\sigma_z - \sigma_2)n_2 &= 0\end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Умножим первые три равенства соответственно на ℓ_2, m_2, n_2 , вторые три — на $-\ell_1, -m_1, -n_1$ и сложим все шесть равенств. Получим:

$$(\sigma_2 - \sigma_1)(\ell_1\ell_2 + m_1m_2 + n_1n_2) = 0.$$

Считая, что в общем случае $\sigma_1 \neq \sigma_2$, приходим к равенству

$$\ell_1 \ell_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0.$$

Рассматривая попарно все площадки, получаем систему уравнений для проверки взаимной перпендикулярности площадок:

$$\left. \begin{aligned} \ell_1 \ell_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 &= 0 \\ \ell_1 \ell_3 + m_1 m_3 + n_1 n_3 &= 0 \\ \ell_2 \ell_3 + m_2 m_3 + n_2 n_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Напряжения в наклонных площадках

Полное напряжение на наклонной площадке можно разложить на две составляющие: нормальную по направлению v и касательную по направлению t (рис. 3).

$$p_v^2 = \sigma_v^2 + \tau_{tv}^2. \quad (16)$$

Величину нормального напряжения σ_v можно найти, проецируя полное напряжение p на направление нормали v .

$$\sigma_v = p_{xv} \ell + p_{yv} m + p_{zv} n. \quad (17)$$

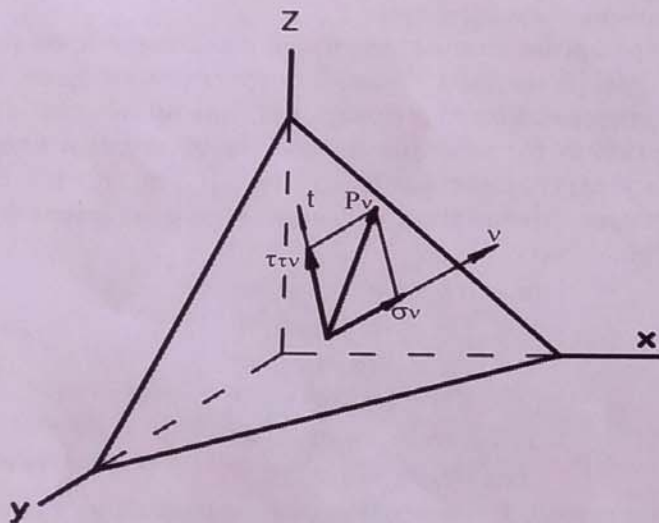


Рис. 3. Составляющие вектора полного напряжения P_v в наклонной площадке с внешней нормалью v

Подставим в это равенство выражения (3) и, учитывая, что $\tau_{yx} = \tau_{xy}$; $\tau_{yz} = \tau_{zy}$; $\tau_{zx} = \tau_{xz}$, получим

$$\sigma_v = \sigma_x \ell^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy} \ell m + 2\tau_{yz} m n + 2\tau_{zx} n \ell. \quad (18)$$

Если исходными площадками при определении напряжений являются главные (касательные напряжения отсутствуют), формула (18) имеет вид

$$\sigma_v = \sigma_1 \ell^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2. \quad (19)$$

Касательное напряжение можно определить из выражения (15), воспользовавшись формулами (3), (4), (18):

$$\tau_{tv}^2 = p_v^2 - \sigma_v^2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 \ell^2 m^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 m^2 n^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 n^2 \ell^2. \quad (20)$$

Экстремальные нормальные и касательные напряжения

С учетом равенства (7) запишем выражение (19) в виде

$$\sigma_v = \sigma_1 (1 - m^2 - n^2) + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2. \quad (21)$$

Исследуем это выражение на экстремум. Нормальное напряжение достигает максимума или минимума в случае, если производные $\partial \sigma_v / \partial m$, $\partial \sigma_v / \partial n$ будут равны нулю. Дифференцируя, получим: $\partial \sigma_v / \partial m (\sigma_2 - \sigma_1) m = 0$; $(\sigma_1 - \sigma_3) n = 0$.

Поскольку в общем случае $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$, получим $m = 0$, $n = 0$, $\ell = 1$. Это означает, что экстремальным является напряжение, действующее на площадке, перпендикулярной к оси ℓ , т.е. σ_1 . Учитывая правило присвоения индексов значениям главных напряжений ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$), можно утверждать, что σ_3 - наименьшее напряжение.

Аналогичное исследование выражения (20) показывает, что касательные напряжения достигают экстремальных значений на площадках, расположенных под углами 45° к главным. Эти напряжения выражаются через главные напряжения по формулам

$$\tau_{12} = -(\sigma_1 - \sigma_2)/2; \quad \tau_{23} = -(\sigma_2 - \sigma_3)/2; \quad \tau_{31} = -(\sigma_3 - \sigma_1)/2.$$

При этом наибольшим напряжением является τ_{31} .

Пример выполнения задания

Для напряженного состояния в точке тела, заданного шестью компонентами $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}=\tau_{yx}, \tau_{yz}=\tau_{zy}, \tau_{xz}=\tau_{zx}$, (рис. 4) требуется:

1. Определить величины главных напряжений.
2. Определить положение главных площадок (вычислить направляющие косинусы нормалей к главным площадкам).
3. Показать на рисунке нормали к главным площадкам.

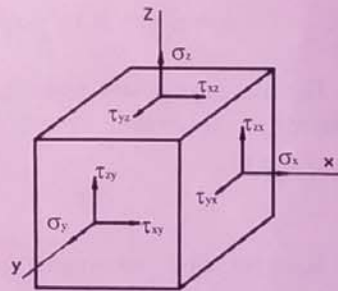


Рис. 4

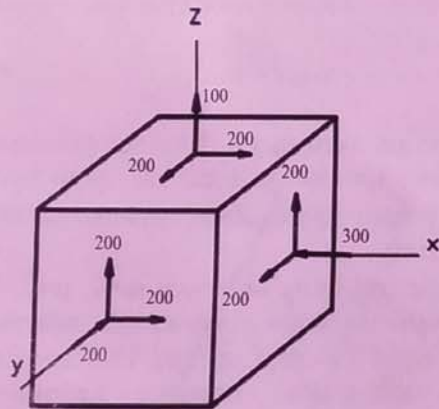


Рис. 5

ний в соответствии с их знаками (рис.5).

- 1.2. Вычисляем инварианты напряженного состояния по формулам (10):

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = -300 - 200 + 100 = -400 \text{ МПа};$$

Дано:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -300 \text{ МПа}, \\ \sigma_y &= -200 \text{ МПа}, \\ \sigma_z &= 100 \text{ МПа}, \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = 200 \text{ МПа}, \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} = 200 \text{ МПа}, \\ \tau_{xz} &= \tau_{zx} = 200 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Решение:

- 1.1. Изобразим на рисунке заданные значения напряже-

$$I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{yx}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = -300 \cdot (-200) + (-200) \cdot 100 + 100 \cdot (-300) - 200^2 - 200^2 - 200^2 = -1.1 \cdot 10^5 \text{ МПа}^2;$$

$$I_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{yx}^2 + 2 \tau_{yx} \tau_{yz} \tau_{zx} = -300 \cdot (-200) \cdot 100 - (-300) \cdot 200^2 - (-200) \cdot 200^2 - 100 \cdot 200^2 + 2 \cdot 200 \cdot 200 \cdot 200 = 3.8 \cdot 10^7 \text{ МПа}^3.$$

- 1.3. Вычисляем вспомогательные величины:

$$a = (I_2 - I_1^2/3)/3 = (-1.1 \cdot 10^5 - (-400)^2/3)/3 = -5.444 \cdot 10^4;$$

$$b = -I_1^3/27 + I_1 I_2/6 - I_3/2 = -(-400)^3/27 + (-400) \cdot (-1.1 \cdot 10^5)/6 - 3.8 \cdot 10^7/2 = -3.719 \cdot 10^7.$$

$$\cos \varphi = \frac{|b|}{|a| \sqrt{|a|}} = \frac{3.719 \cdot 10^7}{5.444 \cdot 10^4 \sqrt{5.444 \cdot 10^4}} = 0.732.$$

- 1.4. Определяем значения главных напряжений (знак перед корнем должен совпадать со знаком b):

$$\begin{aligned} \sigma' &= 2(\pm \sqrt{|a|} \cos \frac{\pi - \varphi}{3} + \frac{I_1}{6}) = \\ &= 2 \cdot (-\sqrt{5.444 \cdot 10^4} \cos \frac{3.1416 - 0.75}{3} + \frac{-400}{6}) = -459.387 \text{ МПа}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma'' &= 2(\pm \sqrt{|a|} \cos \frac{\pi + \varphi}{3} + \frac{I_1}{6}) = \\ &= 2 \cdot (-\sqrt{5.444 \cdot 10^4} \cos \frac{3.1416 + 0.75}{3} + \frac{-400}{6}) = -259.421 \text{ МПа}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma''' &= -2(\pm \sqrt{|a|} \cos \frac{\varphi}{3} - \frac{I_1}{6}) = \\ &= -2 \cdot (-\sqrt{5.444 \cdot 10^4} \cos \frac{0.75}{3} - \frac{-400}{6}) = 318.807 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

- 1.5. Присваиваем главным напряжениям обозначения, исходя из условия $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

$$\sigma_1 = 318.807 \text{ МПа}; \sigma_2 = -259.421 \text{ МПа}; \sigma_3 = -459.387 \text{ МПа}.$$

- 1.6. Производим проверку решения с помощью равенств (10).

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 318.807 - 259.42 - 459.387 = -400.001;$$

$$I_2 = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1 = 318.807 \cdot (-259.421) + (-259.421) \cdot (-459.387) + (-459.387) \cdot 318.807 = 1.1 \cdot 10^5;$$

$$I_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = 318.807 \cdot (-259.421) \cdot (1.1 \cdot 10^5) = 3.799 \cdot 10^7.$$

Расхождение со значениями инвариантов, полученных ранее, менее 5%. Расчет напряжений произведен верно.

2.1. Запишем уравнения (6) и (7) для определения направляющих косинусов к главным площадкам.

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x - \sigma) \ell + \tau_{yx} m + \tau_{xz} n &= 0 \\ \tau_{yx} \ell + (\sigma_y - \sigma) m + \tau_{yz} n &= 0 \\ \tau_{xz} \ell + \tau_{zy} m + (\sigma_z - \sigma) n &= 0 \\ \ell^2 + m^2 + n^2 &= 1 \end{aligned} \right\}$$

Используем для решения два первых и последнее уравнения. Подставим заданные значения напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$:

$$\left. \begin{aligned} (-300 - \sigma) \ell + 200m + 200n &= 0 \\ 200\ell + (-200 - \sigma)m + 200n &= 0 \\ \ell^2 + m^2 + n^2 &= 1 \end{aligned} \right\}$$

2.2. Принимаем $\sigma = \sigma_1 = 318.807$ МПа. Получим следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} (-300 - 318.807) \ell + 200m + 200n &= 0 \\ 200\ell + (-200 - 318.807)m + 200n &= 0 \\ \ell^2 + m^2 + n^2 &= 1 \end{aligned} \right\}$$

или

$$\left. \begin{aligned} (-618.807) \ell + 200m + 200n &= 0 \\ 200\ell + (-518.807)m + 200n &= 0 \\ \ell^2 + m^2 + n^2 &= 1 \end{aligned} \right\}$$

Воспользуемся формулами Крамера для решения данной системы уравнений.

$$\Delta_{11} = -(\sigma_y - \sigma_1) \tau_{zx} + \tau_{yx} \tau_{yz} = -(-200 - 318.807) \cdot 200 + 200 \cdot 200 = 143761;$$

$$\Delta_{21} = -(\sigma_x - \sigma_1) \tau_{yz} + \tau_{yx} \tau_{zx} = -(-300 - 318.807) \cdot 200 + 200 \cdot 200 = 163761;$$

$$\Delta_1 = (\sigma_x - \sigma_1)(\sigma_y - \sigma_1) - \tau_{yx}^2 = (-300 - 318.807) \cdot (-200 - 318.807) - 200^2 = 281041.$$

$$D_1 = \sqrt{\Delta_{11}^2 + \Delta_{21}^2 + \Delta_1^2} = \sqrt{143761.4^2 + 163761.4^2 + 281041^2} = 355627;$$

$$\ell_1 = \Delta_{11}/D_1 = 143761/355627 = 0.404;$$

$$m_1 = \Delta_{21}/D_1 = 163761/355627.7995 = 0.46;$$

$$n_1 = \Delta_1/D_1 = 281041/355627 = 0.790.$$

Для проверки подставим полученные значения в третье уравнение:

$$\tau_{xz} \ell + \tau_{zy} m + (\sigma_z - \sigma) n = 200 \cdot 0.404 + 200 \cdot 0.46 + (100 - 318.807) \cdot 0.7903 = 0.03.$$

2.3. Принимаем $\sigma = \sigma_2 = -259.421$ МПа. Получим следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} (-300 - (-259.421)) \ell + 200m + 200n &= 0 \\ 200\ell + (-200 - (-259.421))m + 200n &= 0 \\ \ell^2 + m^2 + n^2 &= 1 \end{aligned} \right\}$$

или

$$\left. \begin{aligned} (-40.579) \ell + 200m + 200n &= 0 \\ 200\ell + (59.421)m + 200n &= 0 \\ \ell^2 + m^2 + n^2 &= 1 \end{aligned} \right\}.$$

$$\Delta_{12} = -(\sigma_y - \sigma_2) \tau_{zx} + \tau_{yx} \tau_{yz} = -(-200 + 259.421) \cdot 200 + 200 \cdot 200 = 28120;$$

$$\Delta_{22} = -(\sigma_x - \sigma_2) \tau_{yz} + \tau_{yx} \tau_{zx} = -(-300 + 259.421) \cdot 200 + 200 \cdot 200 = 48120;$$

$$\Delta_2 = (\sigma_x - \sigma_2)(\sigma_y - \sigma_2) - \tau_{yx}^2 = (-300 + 259.421) \cdot (-200 + 259.421) - 200^2 = -42410.$$

$$D_2 = \sqrt{\Delta_{12}^2 + \Delta_{22}^2 + \Delta_2^2} = \sqrt{28120^2 + 48120^2 + (-42410)^2} = 70030;$$

$$\ell_2 = \Delta_{12}/D_2 = 28120/70030 = 0.401;$$

$$m_2 = \Delta_{22}/D_2 = 48120/70030 = 0.687;$$

$$n_2 = \Delta_2/D_2 = -4210/70030 = -0.606.$$

Для проверки подставим полученные значения в третье уравнение:

$$\tau_{xz} \ell + \tau_{zy} m + (\sigma_z - \sigma) n = 200 \cdot 0.401 + 200 \cdot 0.687 + (100 + 259.421) \cdot (-0.606) = 0.04.$$

2.4. Принимаем $\sigma = \sigma_3 = -459.387$ МПа. Получим следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} (-300 - (-459.387)) \ell + 200m + 200n &= 0 \\ 200\ell + (-200 - (-459.387))m + 200n &= 0 \\ \ell^2 + m^2 + n^2 &= 1 \end{aligned} \right\}$$

или

$$\left. \begin{aligned} (159.387) \ell + 200m + 200n &= 0 \\ 200\ell + (259.387)m + 200n &= 0 \\ \ell^2 + m^2 + n^2 &= 1 \end{aligned} \right\}.$$

$$\begin{aligned}\Delta_{13} &= -(\sigma_y - \sigma_1) \tau_{zx} + \tau_{yx} \tau_{yz} = -(-200 + 459.387) \cdot 200 + 200 \cdot 200 = -11880; \\ \Delta_{23} &= -(\sigma_x - \sigma_1) \tau_{yz} + \tau_{yx} \tau_{zx} = -(-300 + 459.387) \cdot 200 + 200 \cdot 200 = 81230; \\ \Delta_3 &= (\sigma_x - \sigma_1)(\sigma_y - \sigma_1) - \tau_{yx}^2 = (-300 + 459.387) \cdot (-200 + 459.387) - 200^2 = 13430.\end{aligned}$$

$$D_3 = \sqrt{\Delta_{13}^2 + \Delta_{23}^2 + \Delta_3^2} = \sqrt{(-11880)^2 + 81230^2 + 13430^2} = 14450;$$

$$\ell_3 = \Delta_{13}/D_3 = -11880/14450 = -0.822;$$

$$m_3 = \Delta_{23}/D_3 = 81230/14450 = 0.562;$$

$$n_3 = \Delta_3/D_3 = 13430/14450 = 0.093.$$

Для проверки подставим полученные значения в третье уравнение:

$$\tau_{xz}\ell + \tau_{zy}m + (\sigma_z - \sigma)n =$$

$$= 200 \cdot (-0.822) + 200 \cdot 0.562 + (100 + 459.387) \cdot 0.093 = 0.017.$$

2.5. Результаты вычислений сведем в табл. 1.

Таблица 1

Значения главных напряжений и направляющих косинусов к главным площадкам

Значения главных напряжений, МПа	Направляющие косинусы		
	ℓ	m	n
$\sigma_1 = 318.807$	0.404	0.460	0.790
$\sigma_2 = -259.421$	0.401	0.687	-0.606
$\sigma_3 = -459.387$	-0.822	0.562	-0.093

Проверим взаимную перпендикулярность нормалей с помощью равенств (15).

$$\left. \begin{aligned}\ell_1 \ell_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 &= 0 \\ \ell_1 \ell_3 + m_1 m_3 + n_1 n_3 &= 0 \\ \ell_2 \ell_3 + m_2 m_3 + n_2 n_3 &= 0\end{aligned} \right\}.$$

$$0.404 \cdot (-0.401) + 0.460 \cdot 0.687 + 0.790 \cdot (-0.606) = -8.68 \cdot 10^{-5}.$$

$$0.404 \cdot (-0.822) + 0.460 \cdot 0.562 + 0.790 \cdot (-0.093) = -1.394 \cdot 10^{-5}.$$

$$(-0.822) \cdot (-0.401) + 0.687 \cdot 0.562 + (-0.606) \cdot 0.093 = -7.108 \cdot 10^{-5}.$$

Полученные значения близки к нулю, направляющие косинусы найдены верно.

3. Изобразим на рисунке положение главных нормалей, откладывая в выбранном масштабе соответствующие значения ℓ_i, m_i, n_i (рис. 6).

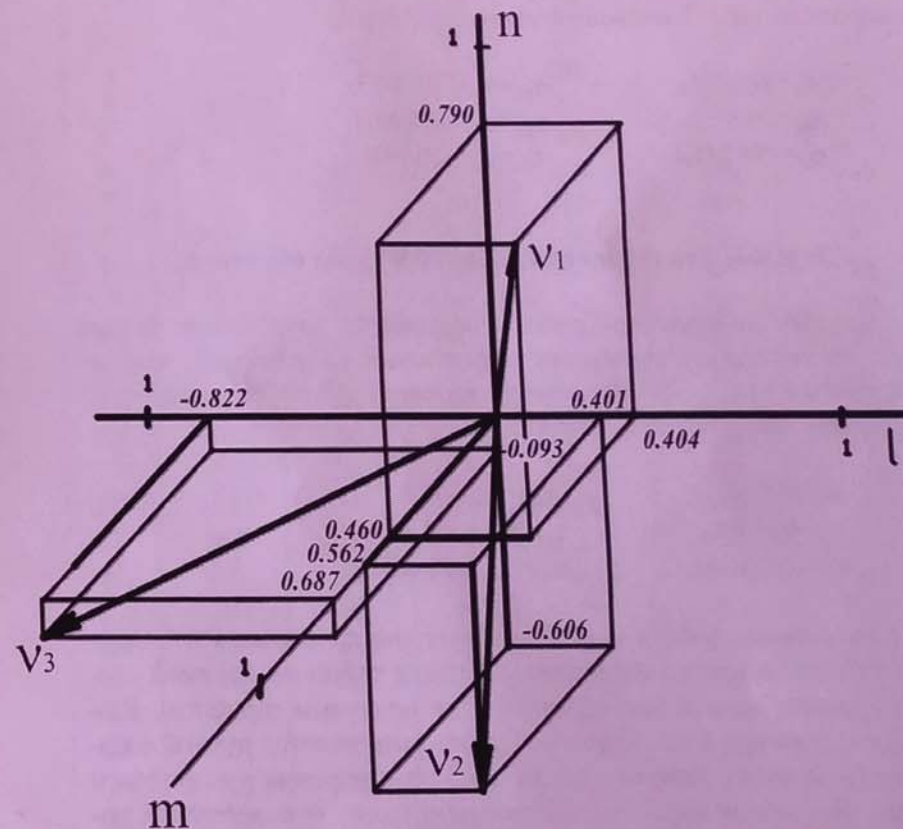


Рис. 6. Положение главных нормалей

Задание для студентов-заочников

Данное задание выполняется, если сумма двух последних цифр номера зачетной книжки больше 9. Если указанная сумма меньше, студент выполняет задание на тему «Плоская задача теории упругости».

Номер варианта задачи определяется по последней цифре шифра. Например, если номер зачетной книжки 283057, студент выбирает из табл. 2 числовых значений 7 строку:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 80 \text{ МПа}, & \tau_{xy} &= \tau_{yx} = -20 \text{ МПа}, \\ \sigma_y &= 50 \text{ МПа}, & \tau_{yz} &= \tau_{zy} = -30 \text{ МПа}, \\ \sigma_z &= -70 \text{ МПа}, & \tau_{zx} &= \tau_{xz} = 20 \text{ МПа}.\end{aligned}$$

Задание для студентов дневной формы обучения

Вариант контрольной работы состоит из двух чисел: первое число соответствует значениям нормальных напряжений, второе – касательных (табл. 2). Например, варианту 13.30 соответствуют следующие значения напряжений:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -30 \text{ МПа}, & \tau_{xy} &= \tau_{yx} = -30 \text{ МПа}, \\ \sigma_y &= 40 \text{ МПа}, & \tau_{yz} &= \tau_{zy} = -20 \text{ МПа}, \\ \sigma_z &= -20 \text{ МПа}, & \tau_{zx} &= \tau_{xz} = -10 \text{ МПа}.\end{aligned}$$

Контрольная работа выполняется на листах формата А4, сшитых в тетрадь и жестко скрепленных между собой по длинной стороне. Надписи на обложке производятся печатным шрифтом. Высота букв не менее 5 мм. Основной текст выполняется ручкой с одной стороны листа. Допускается оформление решения рукописным текстом. На первой странице обязательно наличие содержания задания. Решение должно сопровождаться пояснениями. Рисунки выполняются карандашом в масштабе с применением чертежных инструментов.

Работы, выполненные с нарушением данных правил, не рассматриваются.

Варианты контрольной работы

Таблица 2

Вариант	Значения нормальных напряжений, МПа			Значения касательных напряжений, МПа		
	σ_x	σ_y	σ_z	$\tau_{xy}=\tau_{yx}$	$\tau_{yz}=\tau_{zy}$	$\tau_{zx}=\tau_{xz}$
0	20	30	40	10	10	10
1	20	-20	-30	10	10	10
2	-30	20	40	20	20	-10
3	-40	20	80	20	-20	-20
4	-20	40	10	30	30	-10
5	-30	-50	20	40	-20	-20
6	-50	30	-10	-20	-10	-30
7	80	50	-70	-20	-30	20
8	60	-30	30	-30	-30	30
9	70	-30	50	-40	40	30
10	20	40	-30	30	20	-20
11	20	-30	-40	40	-20	-20
12	-30	40	-20	-20	30	-30
13	-40	80	-30	-20	-20	30
14	-20	10	-50	-30	-10	-20
15	-30	20	80	30	-20	-10
16	-50	-10	60	-20	-30	-30
17	80	-70	70	-10	20	-30
18	60	30	20	-30	30	40
19	70	50	20	-30	30	-20
20	30	20	-30	40	30	-20
21	-20	20	-40	-20	50	-30
22	20	-30	-20	-20	-30	-40
23	20	-40	-30	-30	-40	-30
24	40	-20	-50	-40	-20	-30
25	-50	-30	80	30	-30	40
26	30	-50	60	40	-50	20
27	50	80	20	-20	80	-20
28	-30	60	-30	-20	60	30
29	-30	70	-40	-30	-40	-20
30	30	-70	-20	-30	-20	-10

Библиографический список

1. *Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности*: Учеб. / Под ред. Г.С. Варданяна. М.: АСВ, 1995. 568 с.
2. Самуль В.И. *Основы теории упругости и пластичности*: Учеб. пособие для студентов вузов. 2-е изд., перераб. М.: Высш. шк., 1982. 264 с.
3. Рекач В.Г. *Руководство к решению задач прикладной теории упругости*: Учеб. пособие для студентов строит. специальностей вузов. 2-е изд., испр. и доп. М.: Высш. шк., 1984. 287 с.

Содержание

Введение.....	3
Понятие о напряженном состоянии в точке	3
Главные площадки и главные напряжения.....	6
Напряжения в наклонных площадках.....	10
Экстремальные нормальные и касательные напряжения.....	11
Пример выполнения задания	12
Задание для студентов-заочников.....	18
Задание для студентов дневной формы обучения	18
Библиографический список	20